Entrega 12. Integración.

APELLIDOS: NOMBRE:	Nota:

Ejercicio 1. Dada la función $f(x) = x$, calcula la suma superior e inferior asociada a la partición $P = \{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots 1\}$ del intervalo $[0, 1]$.

Nota:

Ejercicio 2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$

Nota:

calcula la suma superior e inferior asociada a una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots t_n\}$ arbitraria del intervalo $[0, 1]$. ¿Es f integrable?

Ejercicio 3. Calcula la integral:

Nota:

$$\int_{-5}^{5} (|x| + xe^{x^2})\, dx =$$

Ejercicio 4. Calcula el área de la región limitada por $y = \tan x$ y las rectas $y = \frac{2x}{\pi}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{\pi}{3}$.

Nota:

Ejercicio 5. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \ln\left(\frac{1+e^t}{2}\right) dt$ | Nota: |

i) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F en $\mathbb{R}$.

ii) Calcula el límite $$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^6}$$

Ejercicio 6. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$, calcula el volumen del solido de revolución generado por la gráfica de f al girar en torno al eje OX. | Nota: |

Ejercicio 7. Calcula el volumen del sólido cuya base es la región | Nota: | elíptica dada por la curva frontera $9x^2 + 4y^2 = 36$ y las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos rectángulos isósceles con la hipotenusa apoyada en la base del sólido.

Ejercicio 8. Halla la longitud de la catenaria (cable colgante) $y = a \cosh \frac{x}{a}$ desde el vértice $(0, a)$ hasta el punto (b, h). | Nota: |

Ejercicio 9. Cuestiones. Decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta si es verdadera o busca un contraejemplo si no lo es. Nota:

i) La función $f(x) = \begin{cases} x + E(x) & x \in \mathbb{Q} \cap [0,2] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ es integrable en $[0, 2]$.

☐ Si $\int_0^2 f(x)\, dx =$ ☐ No

ii) La función $f(x) = x + E(x)$ es integrable en $[0, 5]$.

☐ Si $\int_0^5 f(x)\, dx =$ ☐ No

iii) Sea f una función continua en $[a, b]$, entonces el área limitada por las rectas $x = a$, $x = b$ y por la gráfica de f viene dada por la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$. ☐ Si ☐ No

iv) Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$, si la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$, entonces $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$. ☐ Si ☐ No

v) Si $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} (t^2 + 1)e^t\, dt$, entonces F es derivable en el intervalo $[0, 5]$

☐ Si $f'(x) =$ ☐ No

vi) Si $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \tan(t) \ln(1 + t^2)\, dt$, entonces F es derivable en el intervalo $[0, 5]$

☐ Si $f'(x) =$ ☐ No

vii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real derivable (con derivada finita) en todo $\mathbb{R}$, estrictamente creciente y que se anula en el punto $t = 0$. Si $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2-5x+6} f(t)\, dt$, entonces F es clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

☐ Si $f'(x) =$ $f''(x) =$ ☐ No